Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.02.2015.

Euklidske geometrije II, pismeni ispit, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

MA, MB i MC su tri duži u prostoru od kojih je svaka okomita na druge dvije. Ako njihove dužine označimo redom sa x, y i z pokazati da

(30%)(a) zapremina tetraedra $MABC = \frac{1}{6}xyz$;

(70%)(b) površina trougla $\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}$.

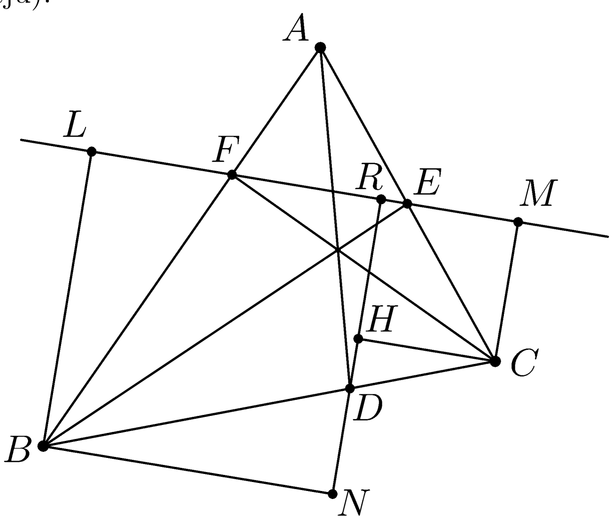
(Mala pomoć: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu o tri normale, kao i teoremu koja kaže da ako je prava okomita na dvije prave u presječnoj tački te dvije prave ona je okomita na ravan kojoj one pripadaju).

Zadatak br. 2

Dat je trougao $\triangle ABC$ takav da su AD, BE i CF tri konkurentne duži koje spajaju vrh trougla sa naspremnom stranicom. Duži BL, DR i CM su okomite na $p(E, F)$ ($L, R, M \in p(E, F)$) i duži BN i CH su okomite na pravu $p(D, R)$ ($N, H \in p(D, R)$). Pokazati da je

(50%)(a) $BD/CD = (DR - LB)/(CM - DR)$;

(50%)(b) $BD \cdot P_{\triangle CEF} + CD \cdot P_{\triangle BEF} = BC \cdot P_{\triangle DEF}$.



Zadatak br. 3

(50%)(a) Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima (detaljno sprovesti sve četri koraka: Analizu, Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju).

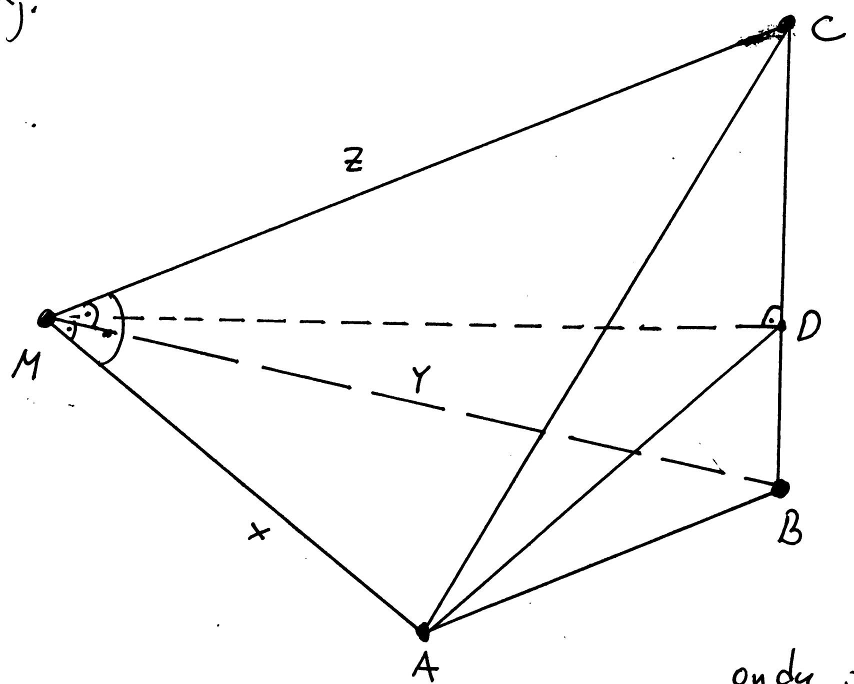
(50%)(b) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i data je prava t. Konstrisati krug k koji dodiruje datu pravu i dva data kruga. (Detaljno sprovesti samo Analizu (analizu uraditi na taj način da se u tekstu ne pozivate na neki raniji Apolonijev problem). Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

\# MA, MB i MC su tri duži u prostoru, od kojih je svaka okomita na druge dvije. Ako njihove dužine označimo redom sa x, y i z, pokazati da

(i) zapremina tetraedra $MABC = \frac{1}{6}xyz$;

(ii) površina trougla $ABC = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$.

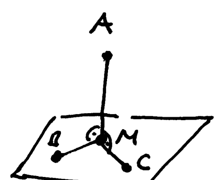
Rj.



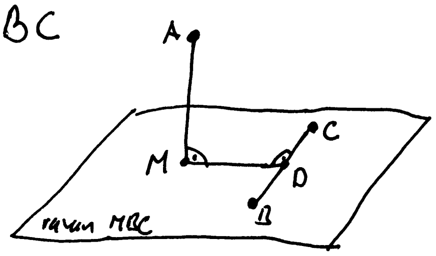
(i) Trivijalno. (ZA VJEŽBU) (skoro isti zadatak je rađen ranije)

(ii) Posmatrajmo ravan MBC. Primjetimo $MA \perp MB$ i $MA \perp MC$ pa ako iskoristimo teoremu koja kaže da ako je prava okomita na dvije prave u presječnoj tački te dvije prave onda je ona okomita na ravan kojoj one pripadaju. $\Rightarrow$

$\Rightarrow MA \perp$ ravan MBC

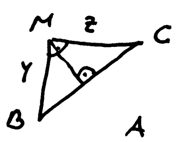


U istoj ravni (ravan MBC) neka je D tačka na $p(B,C)$ t.d. $MD \perp BC$



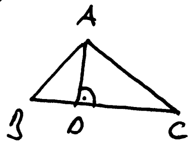
teorema o tri normale $\Rightarrow$ $AD \perp BC$

Posmatrajmo ΔMBC



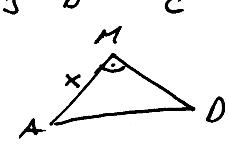
$\underbrace{MB}_{y} \cdot \underbrace{MC}_{z} = 2P_{\Delta MBC} = MD \cdot BC \Rightarrow MD = \frac{y \cdot z}{BC}$

Posmatrajmo ΔABC



$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{x^2 \cdot BC^2 + y^2z^2}$ ...(2)

Posmatrajmo trougao ΔMAD



$AD^2 = AM^2 + MD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{AM^2+MD^2} = \sqrt{x^2 + \frac{y^2z^2}{BC^2}} = \frac{1}{BC}\sqrt{x^2 \cdot BC^2 + y^2z^2}$ ...(1)

Posmatrajmo trougao $\Delta MBC \Rightarrow BC^2 = y^2 + z^2$

$$\left.\begin{array}{l} P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 BC^2 + y^2 z^2} \\ BC^2 = y^2 + z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2}$$

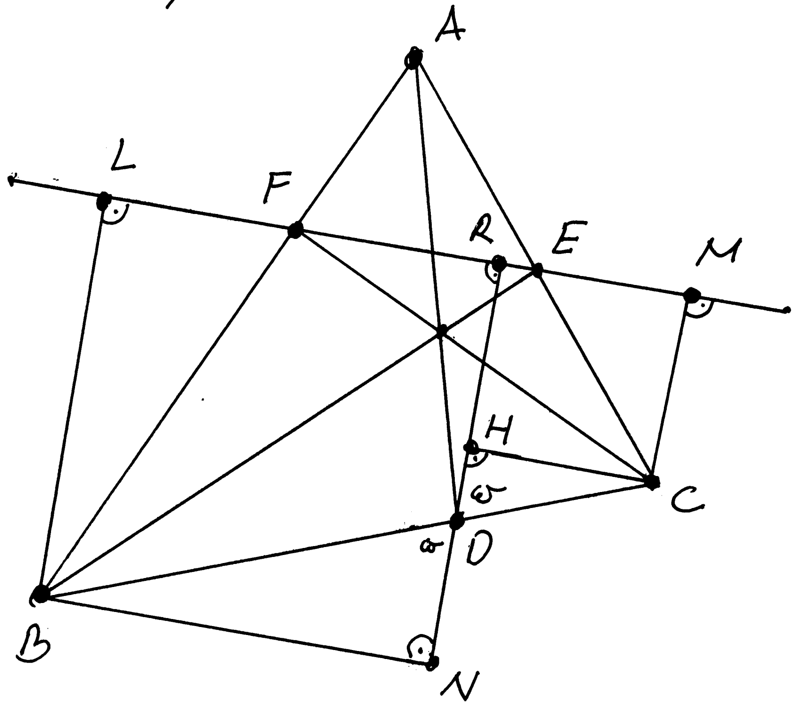
q.e.d.

(#) Dat je trougao ΔABC takav da su AD, BE i CF tri konkurentne duži koje spajaju vrh trougla sa naspramnom stranicom. Duži BL, DR i CM su okomite na $p(E,F)$ $(L,R,M \in p(E,F))$ i duži BN i CH su okomite na $p(D,R)$ $(N,H \in p(D,R))$. Pokazati da je

(a) $BD/CD = (DR-LB)/(CM-DR)$

(b) $BD \cdot P_{\Delta CEF} + CD \cdot P_{\Delta BEF} = BC \cdot P_{\Delta DEF}$

R: Skicirajmo sliku



(a) Posmatrajmo ΔBND i ΔCHD. Ova dva trougla imaju unakrsne uglove (ω) podudarne i imaju po jedan ugao $=90°$. Ovo znači da im je i treći ugao podudaran pa su ta dva trougla slična

$$\Delta BND \sim \Delta BHD$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{BD}{CD} = \frac{ND}{HD} \quad \ldots (1)$$

Dalje primjetimo da je $ND = NR - DR = BL - DR = LB - DR$; ...(2)

$DH = DR - RH = DR - CM$. ...(3)

$$(1),(2) \text{ i } (3) \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{DR-LB}{CM-DR} \quad \text{q.e.d.}$$

(b) Na osnovu (a) imamo $BD \cdot CM - BD \cdot DR = CD \cdot DR - CD \cdot LB$

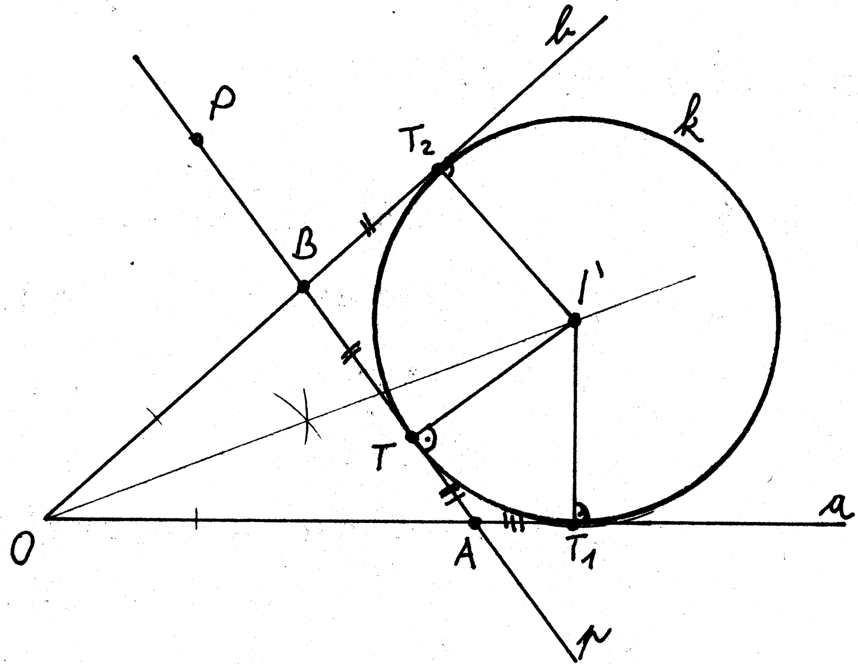
tj. $BD \cdot CM + CD \cdot LB = \underbrace{CD \cdot DR + BD \cdot DR}_{DR \cdot BC} \quad / \cdot \frac{EF}{2}$

$$BD \cdot P_{\Delta CEF} + CD \cdot P_{\Delta BEF} = BC \cdot P_{\Delta DEF}$$

(#) Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku P i od datog ugla $\measuredangle aOb$ odsjeca trougao ΔOAB. Stranici AB trougla ΔOAB pripišimo kružnicu k sa centrom u I'.

Označimo sa T tačku dodira kružnice k i prave p, a sa T_1 i T_2 tačke dodira kružnice k sa pravima a i b.

Iz osobina tangenti na kružnicu znamo da je $AT \cong AT_1$ i da je $BT \cong BT_2$ (da li bi ovo znali dokazati?)

Kako je dat $\measuredangle aOb$ i obim trougla ΔOAB tačke T_1 i T_2 nije problem konstruisati, a time i kružnicu k. Ako iz tačke P povučemo tangentu na k dobićemo tačke A i B, a time i ΔOAB.